SÍNTESIS DEL TEMA

Las expresiones analíticas que permiten establecer la *valoración de los distintos tipos de rentas* son las siguientes:

1) *Rentas constantes.*

Tipo	*Factor*	*Valoración*
— Pospagable	1	$V_0 = C \cdot a_{\overline{n}\|i}$
— Prepagable	$(1+i)$	$V_0 = C \cdot (1+i) \cdot a_{\overline{n}\|i}$
— Anticipada	$(1+i)^x$	$V_{n+x} = C \cdot (1+i)^x \cdot S_{\overline{n}\|i}$
— Diferida	$(1+i)^{-d}$	$V_0 = C \cdot (1+i)^{-d} \cdot a_{\overline{n}\|i}$
— Fraccionada	$\frac{i}{j_k}$	$V_0 = C \cdot \frac{i}{j_k} \cdot a_{\overline{n}\|i} = \frac{C}{k} \cdot a_{\overline{k \cdot n}\|i_k}$

2) *Rentas variables.*

— En progresión aritmética.

$$V_0 = A(C,d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right) \cdot a_{\overline{n}|i} - \frac{d \cdot n \cdot (1+i)^{-n}}{i}$$

— En progresión geométrica.

$$V_0 = A(C,q)_{\overline{n}|i} = \begin{cases} C \cdot n \cdot (1+i)^{-1} & \text{si } q = 1+i \\ C \cdot \dfrac{1-q^n \cdot (1+i)^{-n}}{1+i-q} & \text{si } q \neq 1+i \end{cases}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar los valores actual y final de una renta de cuantía anual 10.000 u.m. y duración 10 años, si se valora a un tipo de interés anual compuesto del 6 %. Además, comprobar que el valor final puede obtenerse también capitalizando el valor actual.

Solución:

Los valores actual y final, de acuerdo con las expresiones de valoración de rentas constantes y pospagables, son, respectivamente:

$$V_0 = 10.000 \cdot a_{\overline{10}|0,06} = 10.000 \cdot \frac{1-(1+0,06)^{-10}}{0,06} = 73.600,87 \text{ u.m.}$$

El valor final también puede obtenerse capitalizando el valor actual:

$$V_{10} = 73.600,87 \cdot (1+0,06)^{10} = 131.807,95 \text{ u.m.}$$

2. Obtener los valores actual y final de una renta de duración 14 años, cuyos pagos anuales, al principio de cada período, son de 50.000 u.m. y se valora a un rédito anual del 7 % compuesto.

Solución:

Los valores actual y final, contemplando la prepagabilidad de los pagos, se obtendrán, respectivamente, como se indica a continuación:

$$V_0 = 50.000 \cdot (1+0,07) \cdot a_{\overline{14}|0,07} = 467.882,54 \text{ u.m.}$$

$$V_{14} = 50.000 \cdot (1+0,07) \cdot S_{\overline{14}|0,07} = 1.206.451,10 \text{ u.m.}$$

3. Una empresa sortea todos los años una cesta de navidad entre sus empleados por importe de 120.000 u.m. Si el tanto de valoración es el 4 % anual compuesto, determinar qué capital ha de colocar en un banco para que se pueda pagar dicha cesta a perpetuidad.

Solución:

El capital que se ha de colocar en la entidad financiera, teniendo en cuenta que la duración es infinita, viene dado por:

$$V_0 = 120.000 \cdot a_{\overline{\infty}|0,04} = 120.000 \cdot \frac{1}{0,04} = 3.000.000 \text{ u.m.}$$

4. Una persona ha colocado todos los años 150.000 u.m. en una entidad financiera que abona intereses al 4,75 % anual compuesto. Calcular el montante obtenido a los 16 años de haberse realizado la primera imposición en los supuestos:

***a)* Imposiciones pospagables durante 8 años.**

***b)* Imposiciones prepagables, teniendo en cuenta que la última se realizó hace 3 años.**

Solución:

a) Como la primera imposición, al ser pospagable, se realiza al final del primer período y deben transcurrir 16 años a partir de entonces, el valor final se obtendrá al final del año 17, contemplando que la renta está anticipada en 9 años y tiene una duración de 8 años. Su valor final es como sigue:

$$V_{17} = 150.000 \cdot (1+0,0475)^9 \cdot S_{\overline{8}|0,0475} = 2.155.553,88 \text{ u.m.}$$

b) En el caso, la primera imposición con carácter prepagable se efectúa al principio del primer período y la última al principio del año 14, contemplando que la renta está anticipada en 2 años y tiene una duración de 14 años. Su valor final, tras los 16 años, es el siguiente:

5. Obtener el valor actual de una renta de cuantía anual 75.000 u.m., que está diferida en 6 años y se valora a un tipo de interés anual compuesto del 6,25 %, en los siguientes casos:

***a)* Duración 14 años.**

***b)* Prepagable y perpetua.**

Solución:

a) El valor actual, de acuerdo con el diferimiento de 6 años, es:

$$V_0 = 75.000 \cdot (1+0{,}0625)^{-6} \cdot a_{\overline{14}|0{,}0625} = 477.133{,}86 \text{ u.m.}$$

b) Mientras que, atendiendo a la prepagabilidad, el diferimiento de 6 años y la duración infinita, se obtendrá de la siguiente forma:

$$V_0 = 75.000 \cdot (1+0{,}0625) \cdot (1+0{,}0625)^{-6} \cdot a_{\overline{\infty}|0{,}0625} = 886.209{,}81 \text{ u.m.}$$

6. ¿Cuántas anualidades de 200.000 u.m. se podrán percibir depositando en una institución financiera 3.124.416 u.m., si el tanto de la operación se fija en el 4 % compuesto anual?

Solución:

Sustituyendo y despejando en la expresión del valor actualizado, el número de anualidades viene dado por:

$$3.124.416 = 200.000 \cdot a_{\overline{n}|0{,}04} \quad \Rightarrow \quad n = 25{,}00000015 \cong 25 \text{ anualidades}$$

7. Una empresa adquiere un determinado equipo industrial que debe pagar del siguiente modo:

— En su puesta en funcionamiento: 4.000.000 de u.m.

— Al final de cada año y durante 4 años: 2.000.000 de u.m.

Si con el equipo se consiguen unos ingresos anuales de 3.000.000 de u.m. desde el final del primer año de funcionamiento y supuesto un tanto de valoración de 9 % compuesto anual, determinar el beneficio actualizado, sabiendo que la vida del equipo es de 10 años y que transcurrido dicho tiempo se vende para desguace por 1.000.000 de u.m.

Solución:

El valor actual de los flujos de costes e ingresos, que surgen en la operación y que determinan el beneficio actualizado, es:

$$V_0 = -4 \cdot 10^6 - 2 \cdot 10^6 \cdot a_{\overline{4}|0{,}09} + 3 \cdot 10^6 \cdot a_{\overline{10}|0{,}09} + 10^6 \cdot (1+0{,}09)^{-10} = 9.195.944{,}16 \text{ u.m.}$$

8. Una renta crece 3.750 u.m. al año. Si el primer término es de 75.000 u.m., obtener los valores actual y final en los siguientes supuestos:

***a)* Duración 8 años y se valora al 4 % anual compuesto.**

***b)* Prepagable, perpetua y aplicando un tanto del 4,75 % anual compuesto.**

***c)* Si el decrecimiento es de 3.750 u.m. al año, calcular la duración máxima posible y su valor actual para esa duración, suponiendo que la renta es prepagable y se valora al 3,5 % anual compuesto.**

Solución:

a) Los valores actual y final, de acuerdo con las expresiones de valoración de rentas en progresión aritmética, se obtendrán, respectivamente, como se indica a continuación:

$$V_0 = A(75.000,\ 3.750)_{\overline{8}|0{,}04} = \left(75.000 + \frac{3.750}{0{,}04}\right) \cdot a_{\overline{8}|0{,}04} - \frac{3.750 \cdot 8 \cdot (1+0{,}04)^{-8}}{0{,}04} =$$

$$= 588.133{,}04 \text{ u.m.}$$

$$V_8 = S(75.000,\ 3.750)_{\overline{8}|0{,}04} = A(75.000,\ 3.750)_{\overline{8}|0{,}04} \cdot (1+0{,}04)^8 =$$

$$= \left(75.000 + \frac{3.750}{0{,}04}\right) \cdot S_{\overline{8}|0{,}04} - \frac{3.750 \cdot 8}{0{,}04} = 804.900{,}68 \text{ u.m.}$$

b) El valor actual, teniendo en cuenta la prepagabilidad y la duración infinita, es:

$$V_0 = (1+0{,}0475) \cdot A(75.000,\ 3.750)_{\overline{\infty}|0{,}0475} =$$

$$= (1+0{,}0475) \cdot \left(75.000 + \frac{3.750}{0{,}0475}\right) \cdot a_{\overline{\infty}|0{,}0475} = 3.394.944{,}60 \text{ u.m.}$$

c) La duración máxima posible viene dado por:

$$75.000 + (n-1) \cdot (-3.750) > 0 \quad \Rightarrow \quad n < 21 \quad \Rightarrow \quad n = 20 \text{ años}$$

Con lo que su valor actual, contemplando la prepagabilidad, se determinará de la siguiente forma:

$$V_0 = (1+0{,}035) \cdot A(75.000,\ -3.750)_{\overline{20}|0{,}035} =$$

$$= (1+0{,}035) \cdot \left(\left(75.000 + \frac{-3.750}{0{,}035}\right) \cdot a_{\overline{20}|0{,}035} - \frac{-3.750.20.(1+0{,}035)^{-20}}{0{,}035}\right) =$$

$$= 641.803{,}13 \text{ u.m.}$$

9. Una renta crece anualmente un 4 %. Si el primer término es de 25.000 u.m., determinar los valores actual y final en los siguientes casos:

***a)* Perpetua, valorándose al 4,5 % anual compuesto.**

***b)* Prepagable, anticipada en 3 años y duración 12 años, aplicando un tanto del 4 % anual compuesto.**

***c)* Si los términos decrecen anualmente un 3 % durante 25 años, calcular su valor actual, considerando que el tanto de valoración es el 5,5 % anual compuesto.**

Solución:

a) El valor actual, de acuerdo con las expresiones de valoración de rentas en progresión geométrica y teniendo en cuenta la duración infinita, es:

$$V_0 = A(25.000;\ 1{,}04)_{\overline{\infty}|0{,}045} = 25.000 \cdot \frac{1}{1+0{,}045-1{,}04} = 5.000.000 \text{ u.m.}$$

b) Los valores actual y final, contemplando la prepagabilidad, el anticipamiento de 3 años y que la razón de la progresión geométrica es igual a la unidad más el tanto de valoración, se obtendrán, respectivamente, como se indica a continuación:

$$V_0 = (1+0{,}04)\cdot A(25.000;\ 1{,}04)_{\overline{12}|0{,}04} = (1+0{,}04)\cdot 25.000\cdot 12\cdot (1+0{,}04)^{-1} =$$

$$= 300.000 \text{ u.m.}$$

$$V_{15} = (1+0{,}04)\cdot (1+0{,}04)^3 \cdot S(25.000;\ 1{,}04)_{\overline{12}|0{,}04} =$$

$$= (1+0{,}04)\cdot (1+0{,}04)^3 \cdot A(25.000;\ 1{,}04)_{\overline{12}|0{,}04} \cdot (1+0{,}04)^{12} = 540.283{,}05 \text{ u.m.}$$

c) El valor actual viene dado por:

$$V_0 = A(25.000;\ 0{,}97)_{\overline{25}|0{,}055} = 25.000 \cdot \frac{1-0{,}97^{25}\cdot (1+0{,}055)^{-25}}{1+0{,}055-0{,}97} = 258.101{,}03 \text{ u.m.}$$

10. Se presentan las siguientes rentas que se valoran al tanto compuesto del 9 % anual. Calcular sus valores actual y final:

***a)* De cuantía semestral 200.000 u.m. y duración 8 años.**

***b)* Pepagable, de cuantía trimestral 125.000 u.m. y perpetua.**

***c)* Diferida en 5 años, de cuantía mensual 95.000 u.m. y duración 6 años.**

Solución:

a) Los valores actual y final, considerando el fraccionamiento semestral, son, respectivamente:

$$V_0 = 200.000 \cdot 2 \cdot \frac{0{,}09}{j_2} \cdot a_{\overline{8}|0{,}09} = 2.262.667{,}98 \text{ u.m.}$$

$$V_8 = 200.000 \cdot 2 \cdot \frac{0{,}09}{j_2} \cdot S_{\overline{8}|0{,}09} = 4.508.507{,}69 \text{ u.m.}$$

donde $j_2 = \left((1+0{,}09)^{1/2} - 1\right)\cdot 2 = 0{,}088061302$.

También pueden obtenerse valorando dicha renta como no fraccionada, utilizando como unidad temporal el semestre y, por tanto, midiendo todas las variables, incluida el tipo de interés, en semestres, como se indica a continuación:

$$V_0 = 200.000 \cdot a_{\overline{2\cdot 8}|i_2} = 2.262.667{,}98 \text{ u.m.}$$

$$V_{2\cdot 8} = 200.000 \cdot S_{\overline{2\cdot 8}|i_2} = 4.508.507{,}69 \text{ u.m.}$$

donde $i_2 = (1+0{,}09)^{1/2} - 1 = 0{,}044030651$.

b) El valor actual, contemplando que tanto la prepagabilidad como el fraccionamiento están referidos al trimestre, se obtendrá de la siguiente forma:

$$V_0 = 125.000 \cdot 4 \cdot (1+0{,}09)^{1/4} \cdot \frac{0{,}09}{j_4} \cdot a_{\overline{\infty}|0{,}09} = 5.864.689{,}68 \text{ u.m.}$$

donde $j_4 = \left((1+0{,}09)^{1/4} - 1\right)\cdot 4 = 0{,}087112723$.

Este mismo resultado puede obtenerse expresando la renta en términos trimestrales, es decir, empleando como unidad temporal el trimestre y refiriendo todas la variables a éste:

$$V_0 = 125.000 \cdot (1+0{,}09)^{1/4} \cdot a_{\overline{\infty}|i_4} = 5.864.689{,}68 \text{ u.m.}$$

donde $i_4 = (1+0{,}09)^{1/4} - 1 = 0{,}021778181$.

c) Los valores actual y final, de acuerdo con el diferimiento de 5 años y el fraccionamiento mensual, vienen dados, respectivamente, por:

$$V_0 = 95.000 \cdot 12 \cdot (1+0{,}09)^{-5} \cdot \frac{0{,}09}{j_{12}} \cdot a_{\overline{6}|0{,}09} = 3.458.684{,}98 \text{ u.m.}$$

$$V_{11} = 95.000 \cdot 12 \cdot \frac{0{,}09}{j_{12}} \cdot S_{\overline{6}|0{,}09} = 8.924.882{,}06 \text{ u.m.}$$

donde $j_{12} = \left((1+0{,}09)^{1/12} - 1\right)\cdot 12 = 0{,}08648788$.

También es posible establecer la valoración en términos mensuales de forma que:

$$V_0 = 95.000 \cdot (1+0{,}09)^{-5} \cdot a_{\overline{12\cdot 6}|i_{12}} = 3.458.684{,}98 \text{ u.m.}$$

$$V_{12\cdot 11} = 95.000 \cdot S_{\overline{12\cdot 6}|i_{12}} = 8.924.882{,}06 \text{ u.m.}$$

donde $i_{12} = (1+0{,}09)^{1/12} - 1 = 0{,}007207323$.

11. Para que una persona pueda percibir al final de cada mes, y por el resto de sus días, una cantidad, deposita 200.000 u.m. en una entidad fianciera que paga el 0,6 % de interés mensual compuesto. Calcular la cantidad que percibirá al final de cada mes.

Solución:

De la expresión que define el valor actual, tomando como unidad temporal el mes, se obtiene que la cuantía mensual es:

$$200.000 = C_{12} \cdot a_{\overline{\infty}|0{,}006} \quad \Rightarrow \quad C_{12} = 1.200 \text{ u.m.}$$

12. Un investigador ha recibido un premio que consiste en una renta bimestral de 100.000 u.m. durante 6 años. Como no necesita este dinero, al menos durante los próximos 6 años, se plantea invertir dicha renta a través de un depósito financiero, teniendo en presentes las siguientes alternativas:

a) **Depósito variable al 4 % anual compuesto los 3 primeros años y al 4,5 % los 3 últimos.**

b) **Depósito fijo al 2,15 % semestral compuesto a lo largo de los 6 años.**

Determinar qué depósito es más ventajoso.

Solución:

Dicho investigador, si sigue un comportamiento racional, preferirá aquel depósito en el que pueda obtener el máximo capital posible al final de los 6 años.

a) El valor final en el depósito variable, contemplando el fraccionamiento bimestral, el anticipamiento de la primera renta y los dos tipos de interés existentes, es:

$$V_6 = 3\cdot 10^5 \cdot 6\cdot (1+0{,}045)^3 \cdot \frac{0{,}04}{j_6}\cdot s_{\overline{3}|0{,}04} + 3\cdot 10^5 \cdot 6\cdot \frac{0{,}045}{j'_6}\cdot s_{\overline{3}|0{,}045} =$$
$$= 12.269.741{,}92 \text{ u.m.}$$

donde $j_6 = \left((1+0{,}04)^{1/6} - 1\right)\cdot 6 = 0{,}039349182$

y $j'_6 = \left((1+0{,}045)^{1/6} - 1\right)\cdot 6 = 0{,}044178738.$

A los mismos resultados se llega planteando su valoración en términos bimestrales.

b) El valor final en el depósito fijo, considerando la renta en términos semestrales con fraccionamiento bimestral, se obtiene de la siguiente forma:

$$V_{2\cdot 6} = 3\cdot 10^5 \cdot 3\cdot \frac{0{,}0215}{j'_3}\cdot s_{\overline{2\cdot 6}|0{,}0215} = 12.260.038{,}18 \text{ u.m.}$$

donde j'_3 representa el tanto nominal semestral con fraccionamiento bimestral y se obtiene como $j'_3 = \left((1+0{,}0215)^{1/3} - 1\right)\cdot 3 = 0{,}021347731.$

También es posible su valoración en términos anuales con fraccionamiento bimestral o en términos bimestrales.

Por tanto, a la vista de los resultados, el depósito más ventajoso es el variable.

13. Un asalariado se plantea la compra de una embarcación de recreo, cuyo precio al contado supone un desembolso de 8 millones de u.m. La empresa vendedora admite el aplazamiento del pago a 10 años, cargando un tanto del 7 % anual compuesto. Dicho asalariado cuenta con un sueldo mensual de 200.000 u.m. más cuatro pagas extras trimestrales de 100.000 u.m. Por otro lado, dispone de un depósito financiero, cuyo montante alcanzará dentro de 2 años un millón de u.m. Determinar si es posible la compra de la embarcación de recreo, teniendo en cuenta que como máximo puede utilizar la cuarta parte del sueldo mensual, además de los importes íntegros de las pagas extras y el depósito financiero.

Solución:

ble la adquisición de la embarcación. Dicho valor se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$V_0 = 5\cdot 10^4 \cdot 12\cdot \frac{0{,}07}{j_{12}}\cdot a_{\overline{10}|0{,}07} + 10^5 \cdot 4\cdot \frac{0{,}07}{j_4}\cdot a_{\overline{10}|0{,}07} + 10^6\cdot (1+0{,}07)^{-2} =$$
$$= 8.103.280{,}85 \text{ u.m.}$$

donde $j_{12} = \left((1+0{,}07)^{1/12} - 1\right)\cdot 12 = 0{,}067849745$

y $j_4 = \left((1+0{,}07)^{1/4} - 1\right)\cdot 4 = 0{,}0682341.$

14. Una empresa ha decidido ampliar sus instalaciones de producción y para ello precisa realizar las siguientes operaciones:

a) **Comprar un terreno con el montante obtenido de haber depositado en un banco, hace 3 años y medio, 2.000.000 de u.m. al 12 % anual capitalizable por trimestres, más el efectivo de descontar racionalmente un efecto, por valor de 1.000.000 de u.m., al 6 % compuesto anual con vencimiento dentro de 18 meses.**

b) **Construir un edificio cuyo coste se eleva 8 pagos trimestrales de 600.000 u.m. más 450.000 u.m. que vencen 3 meses después de la adquisición del terreno, siendo el tanto de valoración del 6 % semestral compuesto.**

c) **Adquirir una maquinaria de producción, dos años después de la compra del terreno, teniendo en cuenta que las siguientes alternativas de pago, ofrecidas por el vendedor, contemplan un tanto del 14 % anual compuesto:**

- ***c.1)*** **Al contado por 7.100.000 u.m.**
- ***c.2)*** **5 anualidades prepagables por importe de 1.800.000 u.m.**
- ***c.3)*** **60 mensualidades prepagables de 150.000 u.m.**
- ***c.4)*** **4.500.000 u.m. al contado y trimestralidades de 250.000 u.m. durante 3 años.**

Determinar el coste actualizado de las operaciones descritas, sabiendo que durante los dos primeros años actúa un tanto de valoración del 6 % semetral compuesto.

Solución:

La valoración de las operaciones descritas en el momento presente determina su coste actualizado.

a) El coste del terreno se obtendrá a partir del depósito bancario y del descuento racional como se indica a continuación:

$$C_{4.3,5}^{\text{Depósito}} = 2\cdot 10^6 \cdot (1+i_4)^{4\cdot 3,5} = 3.025.179{,}45 \text{ u.m.}$$

donde $i_4 = \frac{j_2}{4} = 0{,}03$, ya que $j_2 = 0{,}12$.

$$C_0^{\text{Descuento}} = 10^6 \cdot (1+0{,}06)^{-18/12} = 916.307{,}42 \text{ u.m.}$$

b) El coste del edificio, considerando la renta en términos semestrales con fraccionamiento trimestral, viene dado por:

$$V_0^{\text{Edificio}} = 6\cdot 10^5 \cdot 2 \cdot \frac{0{,}06}{j'_2} \cdot a_{\overline{4}|0{,}06} + 45\cdot 10^4 \cdot (1+0{,}06)^{-1/2} = 4.656.668{,}75 \text{ u.m.}$$

donde $j'_2 = \left((1+0{,}06)^{1/2} - 1\right)\cdot 2 = 0{,}059126028$.

c) Para obtener el coste de la maquinaria, como paso previo, será necesario determinar qué alternativa de pago es más ventajosa, de acuerdo con las ofertas formuladas por el vendedor. Para ello se obtienen los valores, dos años después de la compra del terreno, de las diferentes ofertas:

$$V_2^{c.1)} = 7.100.000 \text{ u.m.}$$

$$V_2^{c.2)} = 1.800.000\cdot(1+0{,}14)\cdot a_{\overline{5}|0{,}14} = 7.044.682{,}15 \text{ u.m.}$$

$$V_2^{c.3)} = 150.000\cdot 12\cdot(1+0{,}14)^{1/12}\cdot\frac{0{,}14}{j_{12}}\cdot a_{\overline{5}|0{,}14} = 6.638.783{,}15 \text{ u.m.}$$

donde $j_{12} = \left((1+0{,}14)^{1/12} - 1\right)\cdot 12 = 0{,}131746223$.

$$V_2^{c.4)} = 4.500.000 + 250.000\cdot 4\cdot\frac{0{,}14}{j_4}\cdot a_{\overline{3}|0{,}14} = 6.940.191{,}54 \text{ u.m.}$$

donde $j_4 = \left((1+0{,}14)^{1/4} - 1\right)\cdot 4 = 0{,}133197939$.

Se elegirá la alternativa *c.3)*, ya que es la menos costosa. Como la maquinaria se compra 2 años después de la adquisición del terreno, será preciso actualizarla 2 años, obteniéndose:

$$V_0^{\text{Maquinaria}} = (1+0{,}06)^{-2\cdot 2}\cdot 6.638.783{,}15 = 5.258.538{,}06 \text{ u.m.}$$

Por tanto, el coste actualizado de todas la operaciones descritas es:

$$V_0^{\text{Coste}} = 3.941.486{,}87 + 4.656.668{,}75 + 5.258.538{,}06 = 13.856.693{,}68 \text{ u.m.}$$

15. Un empresario se plantea llevar a cabo una inversión, cuyos costes e ingresos se describen a continuación:

***a)* Los costes ascienden a 750.000 u.m. semestrales durante el primer año y crecen anualmente un 10 %.**

***b)* Los ingresos, a lo largo del primer semestre, son de 100.000 u.m. mensuales con un crecimiento de 200.000 u.m. al semestre.**

Calcular el beneficio que reportará la inversión en el momento actual, considerando un horizonte temporal de 20 años y un tanto de valoración del 6 % anual capitalizable por semestre.

Solución:

Para obtener el beneficio actualizado será necesario determinar el valor actual de los costes e ingresos.

año, contemplando un fraccionamiento semestral. El valor de los costes se obtiene como se indica a continuación:

$$V_0^{\text{Costes}} = \frac{0{,}0609}{j_2}\cdot A\left(750.000\cdot 2;\ 1{,}1\right)_{\overline{20}|i} =$$

$$= \frac{0{,}0609}{j_2}\cdot 750.000\cdot 2\cdot\frac{1-1{,}1^{20}\cdot(1+i)^{-20}}{1+i-1{,}1} = 41.366.875{,}23 \text{ u.m.}$$

donde $i = (1+0{,}03)^{1/2} - 1 = 0{,}0609$, ya que $j_2 = 0{,}06$ e $i_2 = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$.

b) Del mismo modo que en el caso anterior, como los ingresos crecen semestralmente pero de forma aritmética, la unidad temporal será el semestre, teniendo en cuenta un fraccionamiento mensual. El valor de los ingresos viene dado por:

$$V_0^{\text{Ingresos}} = \frac{0{,}03}{j'_6}\cdot A\left(100.000.6;\ 200.000\right)_{\overline{2.20}|0{,}03} =$$

$$= \frac{0{,}03}{j'_6}\cdot\left(\left(10^5\cdot 6 + \frac{2.10^5}{0{,}03}\right)\cdot a_{\overline{2.20}|0{,}03} - \frac{2\cdot 10^5\cdot 2\cdot 20\cdot(1+0{,}03)^{-2\cdot 20}}{0{,}03}\right) =$$

$$= 87.290.393{,}55 \text{ u.m.}$$

donde $j'_6 = \left((1+0{,}03)^{1/6} - 1\right)\cdot 6 = 0{,}029631732$.

Por tanto, beneficio actualizado es:

$$V_0^{\text{Beneficio}} = -41.366.875{,}23 + 87.290.393{,}55 = 45.923.518{,}32 \text{ u.m.}$$

16. Un grupo de inversores debe decidir sobre la explotación de un centro comercial durante los próximos 20 años. Para ello necesitan depositar una fianza de 25.000 millones de u.m., cuyo importe les será reembolsado al final de la concesión de la explotación. Se encargó el estudio de la inversión a un analista financiero, que resumió las características de la operación en los siguientes puntos:

***a)* Se prevé conseguir unas ventas mensuales de 250 millones de u.m. en el primer año y se espera que en los próximos años se vean incrementadas en un 10 % anual.**

***b)* Los gastos de alquiler de las instalaciones se elevará a 61 millones de u.m. trimestralmente por anticipado hasta el final de la concesión.**

***c)* Los gastos del personal contratado para el centro ascienden a 6 millones de u.m. mensualmente, más dos pagas extras semestrales de la misma cuantía, durante el primer año, y están previstos unos incrementos anuales, tanto en los sueldos como en las pagas extraordinarias, del 12 %.**

***d)* Los consumos y gastos de publicidad, a lo largo del primer año, se es-**

Calcular si el grupo de inversores estarían interesados en la explotación del centro comercial desde el punto de vista financiero, si se desea obtener un tanto de mínimo de rentabilidad del 12 % anual compuesto.

Solución:

Para ver si es viable la explotación del centro comercial será necesario obtener el valor actual de los ingresos y gastos, atendiendo a los distintos puntos que componen la operación.

a) Los ingresos por ventas, contemplando que la renta es en progresión geométrica con fraccionamiento mensual, vienen dados por:

$$V_0^{\text{Ventas}} = \frac{0,12}{j_{12}} \cdot A\,(250 \cdot 12;\ 1,1)_{\overline{20}|0,12} =$$

$$= \frac{0,12}{j_{12}} \cdot 250 \cdot 12 \cdot \frac{1 - 1,1^{20} \cdot (1+0,12)^{-20}}{1+0,12-1,1} = 47.832,508 \text{ millones de u.m.}$$

donde $j_{12} = \left((1+0,12)^{1/12} - 1\right) \cdot 12 = 0,113865515$.

b) Los gastos de alquiler, teniendo en cuenta que la prepagabilidad y el fraccionamiento es trimestral, se obtendrán como sigue:

$$V_0^{\text{Alquiler}} = 61 \cdot 4 \cdot (1+0,12)^{1/4} \cdot \frac{0,12}{j_4} \cdot a_{\overline{20}|0,12} = 1.957,299 \text{ millones de u.m.}$$

donde $j_4 = \left((1+0,12)^{1/4} - 1\right) \cdot 4 = 0,114949379$.

c) Los gastos de personal, considerando dos rentas en progresión geométrica con fraccionamientos mensual y semestral, respectivamente, y teniendo en cuenta que la razón de ambas progresiones es igual a la unidad más el tanto de valoración, serán:

$$V_0^{\text{Personal}} = \frac{0,12}{j_{12}} \cdot A\,(6 \cdot 12;\ 1,12)_{\overline{20}|0,12} + \frac{0,12}{j_2} \cdot A\,(6 \cdot 2;\ 1,12)_{\overline{20}|0,12} =$$

$$= \frac{0,12}{j_{12}} \cdot 6 \cdot 12 \cdot 20 \cdot (1+0,12)^{-1} + \frac{0,12}{j_2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 20 \cdot (1+0,12)^{-1} =$$

$$= 1.575,514 \text{ millones de u.m.}$$

donde $j_2 = \left((1+0,12)^{1/2} - 1\right) \cdot 2 = 0,116601049$.

d) Las compras y gastos de publicidad, contemplando que la renta es en progresión aritmética con un fraccionamiento mensual y prepagable, se obtendrán de la siguiente forma:

$$V_0^{\text{Compras}} = (1+0,12)^{1/6} \cdot \frac{0,12}{j_6} \cdot A\,(300 \cdot 6;\ 108)_{\overline{20}|0,12} =$$

$$= (1+0,12)^{1/6} \cdot \frac{0,12}{j_6} \cdot \left(\left(300 \cdot 6 + \frac{108}{0,12} \right) \cdot a_{\overline{20}|0,12} - \frac{108 \cdot 20 \cdot (1+0,12)^{-20}}{0,12} \right) =$$

Por tanto, el valor actual de los ingresos y gastos, teniendo en cuenta el valor de la fianza, es:

$$V_0 = 47.832,508 - (1.957,299 + 1.575,514 + 19.562,440) - 22.408,331 =$$
$$= 2.328,924 \text{ millones de u.m.}$$

donde $V_0^{\text{Fianza}} = -25.000 + 25.000 \cdot (1+0,12)^{-20} = -22.408,331$ millones de u.m.

Con lo que es interesante la explotación del centro comercial, dado que el valor actualizado de los ingresos supera a los gastos, contemplando un tanto de rentabilidad mínima del 12 % anual.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Las condiciones de pago en la compra de un piso son las siguientes:

— 650.000 u.m. en el momento de formalización del contrato.

— 1.000.000 de u.m. a la entrega de las llaves, que tendrá lugar 2 años después de la formalización de la compra.

— 150.000 u.m. anuales durante 10 años, venciendo el primer pago un año después de la entrega de las llaves.

Si el tipo de valoración es del 9 % anual compuesto, calcular el valor del piso en los siguientes momentos:

***a)* A la formalización del contrato.**

***b)* A la entrega de las llaves.**

***c)* Una vez pagada la última anualidad.**

Solución:

a) $V_0 = 2.301.922,11$ u.m.

b) $V_2 = 2.734.413,66$ u.m.

c) $V_{12} = 6.474.535,24$ u.m.

2. Para la compra de un equipo industrial se ofrecen las siguientes opciones de pago:

***a)* Al contado 6.000.000 de u.m.**

***b)* Al comienzo de cada año y durante 10 años 850.000 u.m.**

***c)* En el momento de la compra 1.000.000 de u.m. y además 5 pagos anuales de 1.300.000 u.m., venciendo el primero a los 2 años de la compra.**

***d)* Al final de cada año y durante 12 años 800.000 u.m.**

Solución:

a) $V_0 = 6.000.000$ u.m.

b) $V_0 = 6.159.854,72$ u.m.

c) $V_0 = 5.806.039,86$ u.m.

d) $V_0 = 6.028.862,41$ u.m.

Por tanto, la opción más ventajosa será la *c)*.

3. Determinar el capital que se necesita imponer en un banco, que abona intereses al 4,5 % anual compuesto, para que sea suficiente para cubrir los gastos de un negocio durante 10 años, sabiendo que el año anterior ascendieron a 100.000 u.m. y se prevé un aumento anual del 3 %.

Solución:

$V_0 = 924.356,61$ u.m.

4. Calcular el depósito que deberá hacerse para que, transcurridos 10 años, se pueda obtener una renta de 5.000 u.m. al final de cada mes de forma perpetua, si el tipo de interés mensual compuesto es el 0,75 %.

Solución:

$V_0 = 271.958,20$ u.m.

5. Una empresa al estudiar un proyecto de inversión evalúa los costes de mano de obra, durante el primer año, en 5 millones de u.m. mensuales con incrementos anuales del 10 %. El estudio abarca un horizonte económico de 10 años y el tanto de valoración es del 12 % anual compuesto. Determinar el valor actualizado de estos costes.

Solución:

$V_0 = 892.658.879,52$ u.m.

6. Hace tres años fue comprado un coche por 475.000 u.m., el cual es vendido en la actualidad por 200.000 u.m. Los gastos de mantenimiento han ascendido a 8.000 u.m. mensuales. Si el tanto de valoración es del 10 % anual compuesto, determinar el coste de disfrute de este coche en la actualidad, así como el coste de disfrute mensual.

Solución:

$V_3 = 764.298,41$ u.m. y $C_{12} = 18.412,76$ u.m.

7. Una inmobiliaria ofrece a sus clientes la formalización de contratos de venta de unos pisos, que se encuentran en construcción y se entregarán dentro de 2 años, permitiendo tres modalidades de pago:

***a)* Entregar a la formalización del contrato 1.000.000 de u.m. y 24 mensualidades de 75.000 u.m., abonándose la primera en el momento de**

***b)* Pagar 2 millones de u.m. a la formalización del contrato, 4 millones a la entrega de llaves y el resto, durante 15 años, a través de pagos mensuales de 80.000 u.m. en el primer semestre, contemplando incrementos semestrales del 5 %.**

***c)* Aportar a la entrega de llaves 1.000.000 de u.m. y el resto mediante 32 trimestralidades prepagables de 600.000 u.m. para el primer año, teniendo en cuenta un crecimiento de 240.000 u.m. al año.**

Determinar qué alternativa de pago es más ventajosa, si el tanto de valoración es el 10 % anual capitalizable por semestres.

Solución:

a) $V_0 = 16.462.187,14$ u.m.

b) $V_0 = 16.806.414,65$ u.m.

c) $V_0 = 15.243.661,64$ u.m.

Por tanto, la opción más ventajosa será la *c)*.

Bibliografía

ALEGRE, P.; BORRELL, M.; BADÍA, C. y SANCHO, T. (1995): *Ejercicios resueltos de matemática de las operaciones financieras,* Editorial AC, Madrid.

ÁLVAREZ, A. (1992): *Matemáticas financieras,* Editorial Paraninfo, Madrid.

ÁLVAREZ, M. (1992): *Matemáticas financieras,* Editorial Alhambra Longman, Madrid.

ARRANZ, C. y AVILÉS, F. (1992): *Operaciones financieras,* Editorial Centro de Estudios Financieros, Madrid.

BONILLA, M. e IVARS, A. (1994): *Matemática de las operaciones financieras. (Teoría y práctica*), Editorial AC, Madrid.

CABELLO, J. M.; GÓMEZ, T.; RUIZ, F.; RODRÍGUEZ, R. y TORRICO, A. (1999): *Matemáticas financieras aplicadas. 127 problemas resueltos,* Editorial AC, Madrid.

CALZADA, J. M. y GARCÍA, A. (1997): *Matemática de las operaciones financieras,* Editorial AC, Madrid.

CAMACHO, E.; GÓMEZ, D.; HINOJOSA, M. A.; RUBIALES, V. y VÁZQUEZ, J. M. (1997): *Problemas de matemáticas financieras,* Ediciones Pirámide, Madrid.

DE PABLO, A. (1996): *Manual práctico de matemática comercial y financiera,* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.

DE PABLO, A. (1998): *Matemáticas de las operaciones financieras*, vols. I y II, UNED, Madrid.

DE PABLO, A. (1998): *Valoración financiera,* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.

DELGADO, C. (1995): *Matemática financieras. Teoría y 1.200 ejercicios,* Palomero-Delgado Editores, Logroño.

FANJUL, J. L.; ALMOGUERA, A. y GONZÁLEZ, M. C. (1996): *Análisis de las operaciones financieras,* Editorial Civitas, Madrid.

FERRUZ, L. (coord. y dir.) (1994): *Operaciones financieras. Descripción, análisis y valoración,* Editorial Ariel, Barcelona.